Adı-Soyadı: 11.04.2019

Numarası : **Matematik Bölümü Dif. Denk.II Arasınav Soruları**

1) $Ly=0$ değişken katsayılı n inci mertebeden homojen lineer diferansiyel denkleminin $y(x_0)=0, y'(x_0)=0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=0$ şartını sağlayan çözümünün ancak ve ancak $y(x)=0$ olduğunu gösteriniz.

2) $y'''-y=2\sin x$ **3)** $y'''+4y''+4y'=3-x^2$ **4)** $2y''-3y'+y=1-2e^x$ $y(0)=0$, $y'(0)=0$

5) $3(y')^2-2xy'+2y=0$ denkleminin genel çözümünü varsa tekil çözümünü varsa zarfını bulunuz.

6) $(x-1)y''-xy'+y=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

NOT: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız.

*) $y(x)=\ln c_1x-\ln\frac{c_2}{x^2}+c_3\cosh(\ln x)+\ln\sqrt{c_4x^3}+c_5x+\frac{c_6}{x}+c_7+9\ln\frac{2}{\sqrt{x}}+3x^{-1}+x-1$ ifadesi kaçıncı mertebeden homojen olan veya olmayan denklemin genel çözümüdür? $y(x)=c_8+c_9x+c_{10}x^{-1}$ yazıldığından 3. mert. homojen olan

Başarılar. N.A.

Çözümler

1)

($\Leftarrow$) $y(x)=0$ $Ly=0$ denkleminin $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=0$ şartını sağlayan çözümü olduğu açıktır.

($\Rightarrow$) $Ly=0$ denkleminin $y(x_0)=0, y'(x_0)=0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=0$ şartını sağlayan çözümünün $y(x)=0$ olduğunu gösterelim.

$Ly=0$ n. mertebeden homojen lineer dif denklemin $y_1(x),\dots,y_n(x)$ şeklinde n-tane lineer bağımsız çözümü var ve genel çözüm $y(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$ dir. Bu çözüm $y(x_0)=0, y'(x_0)=0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=0$ şartlarını sağlatırsak,

$$\left.\begin{array}{l} 0=c_1y_1(x_0)+\dots+c_ny_n(x_0)\\ 0=c_1y_1'(x_0)+\dots+c_ny_n'(x_0)\\ \vdots\\ 0=c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)\end{array}\right\} (*)$$

şeklinde homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0)\\ y_1'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0)\\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{vmatrix}\neq 0$$

dır. Çünkü $Ly=0$ denkleminin $y_1(x),\dots,y_n(x)$ fonksiyonları lineer bağımsız old. dan her x için

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x)\\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}\neq 0 \text{ dır.}$$

özel olarak $x=x_0$ içinde sıfırdan farklı olur. Buna göre homojen lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin $\det\neq0$ old. dan (*) denklem sisteminin $c_1=0,\dots,c_n=0$ çözümü bulunur. Bu değerler genel çözümde yerine yazılırsa $Ly=0$ çözümü $y(x)=0$ olur.

2) $y''' - y = 2\sin x \quad y''' - y = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)=0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = \frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad u(x) = c_1e^{x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ olur

Şimdi de $y'''-y=2\sin x$ bir özel çözümünü bulalım

$$V(x) = \frac{1}{D^3-1}2\sin x = \frac{1}{D^2\cdot D-1}2\sin x = \frac{1}{-1^2\cdot D-1}2\sin x = -\frac{1}{D+1}2\sin x = -\frac{D-1}{D^2-1}2\sin x$$

$$= -\frac{D-1}{-1^2-1}2\sin x = (D-1)\sin x = D\sin x - \sin x = \cos x - \sin x \text{ olur}$$

Denklemin genel çözümü $y(x) = u(x)+V(x)$

$$\Rightarrow y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x - \sin x$$

—o—o—o—

3) $y'''+4y''+4y' = 3-x^2, \quad y'''+4y''+4y'=0 \Rightarrow \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda=0$

$\lambda(\lambda+2)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \ \lambda_2=-2$ 2 tane $u(x)=c_1+c_2e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$ olur

$$V(x) = \frac{1}{D^3+4D^2+4D}(3-x^2) = \frac{1}{4D}\left(\frac{1}{1+\frac{D^2+4D}{4}}\right)(3-x^2)$$

$\varphi(D)$, $\varphi(0)=0$ olur

$$=\frac{1}{4D}\left(1-\frac{D^2+4D}{4}+\frac{(D^2+4D)^2}{4^2}-\cdots\right)(3-x^2)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{D}\left(3-x^2-\frac{D^2-4D}{4}(3-x^2)+\left(\frac{D^2+4D}{4}\right)^2(3-x^2)-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{D}\left(3-x^2-\frac{1}{4}(-2-4(-2x))+(-2)+0\right)=\frac{1}{4}\frac{1}{D}\left(3-x^2-\frac{1}{4}(-2+8x)-2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{D}\left(\frac{3}{2}-x^2-2x\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\frac{x^3}{3}-x^2\right) \text{ olur.} \qquad \frac{1}{2}-2+3$$

Genel çözüm $y(x)=c_1+c_2e^{-2x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{4}\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{3}{2}x\right)$ olur.

o — o — o

4) $2y''-3y'+y=1-2e^{x} \Rightarrow 2y''-3y'+y=0 \Rightarrow 2\lambda^2-3\lambda+1=0 \quad (2\lambda-1)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=\frac{1}{2} \quad \lambda_2=1 \Rightarrow u(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{x}$ olur. Özel çözüm $V(x)=\frac{1}{2D^2-3D+1}(1-2e^{x})$

$$=\frac{1}{2D^2-3D+1}1e^{0\cdot x}-2\frac{1}{(2D-1)(D-1)}e^{x} = \frac{1}{2\cdot0^2-3\cdot0+1}e^{0x}-2\frac{1}{(2\cdot1-1)(D-1)}e^{x} = 1-2\frac{1}{D-1}e^{x}\cdot 1$$

$=1-2e^{x}\frac{1}{D+\cancel{1}-\cancel{1}}1 = 1-2e^{x}x$ olur Genel çözüm $y(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{x}+1-2e^{x}x$

olur. $y(0)=0 \Rightarrow x=0 \quad y=0 \quad 0=c_1+c_2+1-2e^{0}0 \Rightarrow \boxed{c_1+c_2=-1}$

$y'(0)=0, \ y'(x)=\frac{1}{2}c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{x}-2e^{x}-2e^{x}x \Rightarrow x=0, y'=0 \Rightarrow 0=\frac{1}{2}c_1+c_2-2 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}c_1+c_2=2}$

$\left.\begin{array}{l}c_1+c_2=-1\\ c_1+2c_2=4\end{array}\right\} \begin{array}{l}c_1=-6\\ c_2=5\end{array}$ bulur. Böylece istenen çözüm

$$\boxed{y(x)=-6e^{\frac{1}{2}x}+5e^{x}+1-2e^{x}x} \text{ olur}$$

5) $3y'^2 - 2xy' + 2y = 0$ Denklem düzenlenirse

$y = xy' - \frac{3}{2}y'^2$ şeklinde olduğundan Clairaut denklemidir

$y' = P$ alınırsa $y = xP - \frac{3}{2}P^2 \Rightarrow y' = P + xP' - \frac{3}{2}.2PP' \Rightarrow \cancel{P} = \cancel{P} + \underline{(x-3P)P'}$

$x-3P=0$, $P'=0 \Rightarrow P = c$ olur. Denklemde yerine yazılırsa genel çözüm

$y = xc - \frac{3}{2}c^2$ şeklinde bulunur. Şimdi tekil çözümü bulalım.

$x - 3P = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{3}x$ olur Denklemde yerine yazılırsa

$y = x.\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}.\left(\frac{1}{3}x\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{\cancel{3}}{2}\frac{1}{\cancel{9}}x^2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{6}x^2$ olur.

Bu tekil yerlerin denklemidir. Tekil çözüm mü? $y = \frac{1}{6}x^2$

$y' = \frac{1}{3}x$ $y = xy' - \frac{3}{2}y'^2$ de yerine yazarsak

$\frac{1}{6}x^2 = x.\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{6}x^2 = \frac{1}{6}x^2$ old. çözümdür.

(veya $y = \frac{1}{6}x^2$ $P = \frac{1}{3}x$ bulunduğundan $y' = \frac{1}{3}x = P$ old.dan çözümdür) Dolayısıyla tekil çözümdür. Zarf mıdır.

$y = \frac{1}{6}x^2$ $y = cx - \frac{3}{2}c^2$ de yerine yazılırsa

$\frac{1}{6}x^2 = cx - \frac{3}{2}c^2 \Rightarrow x^2 - 6cx + 9c^2 = 0$ $(x-3c)^2 = 0$

$x = 3c$ ikinci dereceden katlı kök old.dan $y = \frac{1}{6}x^2$ zarftır.

6) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$ bir özel çözümü olduğundan Liouville formulu yardımıyla genel çözüm bulunur. $\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = ce^{-\int P_1(x)dx}$

$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = ce^{-\int \frac{-x}{x-1}dx} \Rightarrow xy' - y = ce^{\int \frac{x}{x-1}dx}$, $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ old.dan

$\frac{xy'-y}{x^2} = \frac{c}{x^2}e^{\int(1+\frac{1}{x-1})dx} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{c}{x^2}.e^{x+\ln(x-1)} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = ce^x\frac{x-1}{x^2}$

$\underline{\frac{y}{x} = c\int e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx + c_1}$ Burada $\int e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int e^x\frac{1}{x}dx + \underbrace{\int e^x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx}_{I}$

$I = \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx}_{dv,\ v=\frac{1}{x}\text{ olur}} = e^x.\frac{1}{x} - \int e^x.\frac{1}{x}dx$ olur. Yerine yazılırsa

$\int e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \cancel{\int e^x\frac{1}{x}dx} + e^x\frac{1}{x} - \cancel{\int e^x\frac{1}{x}dx} = e^x\frac{1}{x}$ olur. Bu da yerine yazılırsa

$\frac{y}{x} = ce^x.\frac{1}{x} + c_1 \Rightarrow \boxed{y = ce^x + c_1x}$ şeklinde genel çözüm bulunur.